Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe

佐々木, 節

Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe

広大・理論研　佐々木　節

§ 1. Introduction

最近の宇宙論は，いわゆる Inflation 宇宙モデルを抜きには語れなくなっているが，Inflation そのものの dynamics については，様々な難題が存在し，それが良く理解されたとは到底言えないのが現状である[1]。ここでは，その問題点の一つとして，Inflation 宇宙における量子場の vacuum fluctuation が銀河形成の種となる密度ゆらぎを与える，と言う一般認識[2]について，それが果して妥当な考え方であるのか吟味する。

通常の議論では[2]，Inflation は空間的一様な scalar 場 φ がその potential $V(\varphi)$ をゆっくりところがり落ちる時に起こる (slow-rollover phase transition, 図1)。今，宇宙の metric を

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2 , \tag{1.1}$$

とすると，Einstein 方程式と φ の運動方程式は

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \quad ; \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{1.2a}$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 , \tag{1.2b}$$

となるが，φ がゆっくりころがると言う条件は (1.2a) で $\dot{\varphi}$ が，(1.2b) では $\ddot{\varphi}$ が無視できる事を意味し，

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\varphi) \approx \text{const.} , \tag{1.3a}$$

$$\dot{\varphi} \approx -\frac{1}{3H} V'(\varphi) \tag{1.3b}$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} \approx -\frac{V''(\varphi)}{3H^2} \equiv -\frac{m(\varphi)^2}{3H^2} \ll 1 , \tag{1.3c}$$

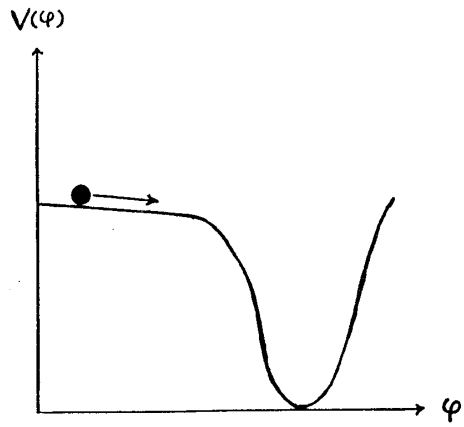

図 1

となる。この時 (1.3a) より $a \propto e^{Ht}$ となり，宇宙は exponential expansion をする (≈ de Sitter 宇宙)。このような宇宙で重要な事は，宇宙の特徴的時間あるいは長さ $L_H = H^{-1}$ (宇宙の horizon size と言う) が一定であるため，初期に L_H より充分小さかった任意の scale l_0 が $l(t) = e^{Ht} l_0$ と引き延ばされ，ある時期に必ず L_H より大きくなる事である (図2)。すなわち，micro な scale が macro な scale に転化するわけである。そこで一般には micro な scale におけ

量子ゆらぎが macro な scale において古典的密度ゆらぎとなる，と信じられている。

ところが，上の解釈にはいくつかの問題点がある。まず第一に上で macro な scaleと考えているのは $l \gg L_H$ であるが，一般に宇宙の horizon size より大きな scale では，一般相対論的効果が重要になり，そこでの密度ゆらぎという概念は，座標の取り方 (coordinate gauge condition) に大きく依存して ambiguous になる事である[3),4)]。次に，問題を gauge の取り方によらない形で formulate する事は可能であり，又，そうすべきであるが，量子論的系を古典的系として取り扱えるための条件 (古典近似の妥当性の条件) は，一般に gauge の取り方，あるいは dynamical variables の選び方による可能性を否定できない事である。

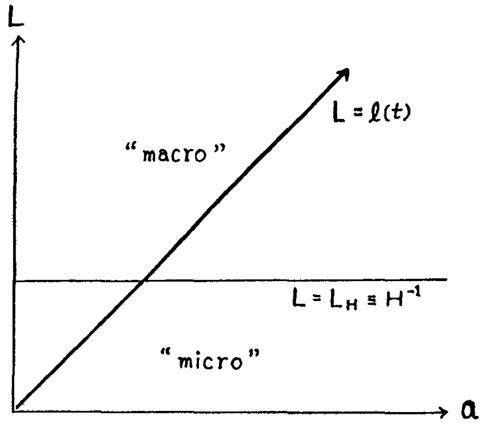

図 2

§ 2. Gauge-invariant fluctuations in the inflationary universe

ここでは， § 1 の最後に提起した第一の点を取り上げ，Inflation 宇宙でのゆらぎを gauge-invariant に取り扱う方法を与える。(1. 1) で与えられた background metric と空間的一様な scalar 場 φ に対してそれらのゆらぎを[4),5)]

$$d\tilde{s}'^2 = -(1+2A)\,dt^2 + 2a\,\partial_i B\,dx^i\,dt$$

$$+ a^2\{(1+2\mathcal{R})\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j H_T\}\,dx^i\,dx^j, \tag{2. 1a}$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \ , \tag{2. 1b}$$

とする。ここで A，B，$\mathcal{R}$，H_T，$\delta\varphi$ の 5 つの関数が， ゆらぎを表わす量であり，metric のゆらぎとしては， $\delta\varphi$ に couple する mode (scalar mode ≈ 密度ゆらぎの mode)のみを考えている。 この mode に対しては，一般座標変換に対する共変性から， 2 つの gauge 変換の自由度がある事がわかり，そのため，独立な変数は 5 − 2 = 3 個となる。そこで，無限小座標変換を考え，それに対応する gauge 変換に対して不変な変数をさがすと，

$$\Psi \equiv A + [\,a(B - a\dot{H}_T)]^{\cdot} = \sum_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2. 2a}$$

$$\Phi \equiv \mathcal{R} + \dot{a}\,(B - a\dot{H}_T) = \sum_{\vec{k}} \Phi_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{2. 2b}$$

$$\Delta\varphi \equiv \delta\varphi + a\,(B - a\dot{H}_T)\,\dot{\varphi} = \sum_{\vec{k}} \Delta\varphi_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{2. 2c}$$

の 3 つが互いに独立なものとしてみつかる。 ここで， $\psi_{\vec{k}}$，$\Phi_{\vec{k}}$，$\Delta\varphi_{\vec{k}}$ は時間 (t) のみによる関数で，以下では便宜上これらの Fourier 係数を使って議論する。

(2. 2) の変数について Einstein 方程式と scalar 場の方程式を書き下すと，さらにこれら3つの間に2つの constraint 方程式があり，物理的に真の独立な自由度は一つであることがわかる[5]。そこで，その独立な自由度として，

$$Q_{\vec{k}} \equiv \frac{k}{4\pi G \dot{\varphi} a} \Psi_{\vec{k}} \ ; \quad k = |\vec{k}| \ , \tag{2. 3}$$

なる変数を導入すると，$\Delta\varphi_{\vec{k}}$ と $\Phi_{\vec{k}}$ は

$$\Delta\varphi_{\vec{k}} = \frac{1}{\dot{\varphi} a} \left(\frac{a^2 \dot{\varphi}}{2} Q_{\vec{k}} \right)^{\cdot} \ , \tag{2. 4a}$$

$$\Phi_{\vec{k}} = -\Psi_{\vec{k}} = -\frac{4\pi G \dot{\varphi} a}{k} Q_{\vec{k}} \ , \tag{2. 4b}$$

と表わされ，$Q_{\vec{k}}$ は

$$\ddot{Q}_{\vec{k}} + 3 H \dot{Q}_{\vec{k}} + \left[\frac{k^2}{a^2} + \frac{1}{6} \overset{(4)}{R} + \mu(\varphi)^2 \right] Q_{\vec{k}} = 0 \ , \tag{2. 5}$$

なる方程式を満たす。ここで

$$\overset{(4)}{R} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) \approx 12 H^2 \ , \tag{2. 6a}$$

$$\mu(\varphi)^2 = -m(\varphi)^2 - 2 \frac{\ddot{\varphi}(\ddot{\varphi} + 2H\dot{\varphi})}{\dot{\varphi}^2} + 4\pi G \dot{\varphi}^2$$

$$\approx \frac{1}{3} m(\varphi)^2 \ll H^2 \ , \tag{2. 6b}$$

であり，(2. 6) に表われる近似的等号や二重不等号は，slow-rollover の条件 (1. 3) の結果である。(2. 5) の重要な点は，それが重力と conformal coupling ($\frac{1}{6} \overset{(4)}{R}$ の項) した scalar 場の方程式と同じ形をしている事であり，さらに (2. 6a) の最後の二重不等号により，この場が近似的に massless と考えてよい事である。すなわち，

$$Q \equiv \sum_{\vec{k}} Q_{\vec{k}} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{2. 7}$$

とすると Q は近似的に massless conformal scalar 場となる。この事は，Inflation 時期に metric のゆらぎと couple した scalar 場 φ の量子ゆらぎの問題が metric のゆらぎを含まない de sitter 宇宙上での massless conformal scalar 場の量子論と同等である事を示している[6]。

§ 3. Quantum fluctuations in the inflationary universe

近似的 massless conformal scalar 場 Q を量子化すると，

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\hat{b}_k q_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + h.c. \right), \tag{3.1}$$

$$q_k \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{a} \exp\left[-i \int^t \frac{k}{a(t')} dt' \right], \tag{3.2a}$$

$$\hat{b}_k |O_c\rangle = 0, \tag{3.2b}$$

となる。ここで $|O_c\rangle$ は conformal vacuum と呼ばれる最も自然な真空で，q_k はそれに対応する positive frequency function であり，Inflation 宇宙においては，いくつかの議論から[7]，$|O_c\rangle$ の状態が実現すると考えられている。一担 Q が量子化されれば，後は，(2. 3)，(2. 4) によって metric や φ の量子ゆらぎに関する任意の情報が簡単に得られる。さて，古典的な宇宙の密度ゆらぎの理論において重要な役割を果す量として

$$\Phi^* \equiv -\left(\Psi + \frac{H}{\dot{\varphi}} \Delta\varphi \right), \tag{3.3}$$

がある[4),8)]。この量は宇宙の horizon size より大きい scale での物理的な密度ゆらぎの真の大きさを与える gauge-invariant 量であり，古典的には，その scale で時間的に一定であることがわかっている。そこで，Φ^* の量子論的ゆらぎの大きさを評価すると，

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\Phi}^*)^2 \rangle_{\vec{k}} &\equiv \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} |\Phi^*_{\vec{k}}|^2 \\ &= \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} \left(\frac{aH}{k\dot{\varphi}} \right)^2 |\dot{q}_k + 2Hq_k|^2 \\ &\approx \left(\frac{H^2}{2\pi\dot{\varphi}} \right)^2 \quad \text{for} \quad \frac{k}{a} \ll H, \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる。すなわち，今ゆらぎの scale を l とすると，$l = \frac{a}{k}$ であるから，$l \gg L_H = H^{-1}$ において Φ^* のゆらぎが $H^2/2\pi|\dot{\varphi}|$ という時間的にほぼ一定かつ l によらない値に近づく事になる。これは平担な Minkowski 時空では起こらない事で (Minkowski 時空での量子場は通常 phase volume factor $4\pi k^3$ のため $k \to 0$ でゆらぎは 0 に収束する)，macroscopic scale で量子ゆらぎが凍結して残ることになる。そこで一般にこの量子ゆらぎを古典的密度ゆらぎと見なすことが妥当であると考えられている[2)]。

§ 4. Proposed criterion for classical realization

量子論的ゆらぎが古典的になったと見なしてよいかどうか，という問題について § 3 の終りでは，非常に直観的な議論を紹介したが，その妥当性を評価するためには，より物理的に明確な議論が必要である。最近，これに対して Lyth[9)] や Guth-Pi[10)] などがある程度説得力のある議論を展開している。そこでまずその概略を紹介し，次にその議論を今の問題に適用して量子ゆらぎの古典化が果して本当に起っているのか吟味する。

Lyth や Guth-Pi の議論をまとめると以下のようになる。今，ある Hamiltonian $H(\hat{x},\hat{p};t)$ に支配される量子系において，

$$<\psi|H(\hat{x},\hat{p};t)|\psi>=E(t) \qquad (4.1)$$

なる状態 $|\psi>$ を考える。さて，この状態 $|\psi>$ に対して，ある時刻 t_0 以後常に

$$<\psi|\hat{x}^2|\psi><\psi|\hat{p}^2|\psi>\gg \hbar^2=1, \qquad (4.2)$$

なる不等式が成立する場合，

$$f(x,p,t)\equiv|\psi(x;t)|^2\delta(p-p_{cl}(x;E(t))), \qquad (4.3)$$

で定義される関数 f は近似的に

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\right)f(x,p;t)=0, \qquad (4.4)$$

を満たす事が示せる[10]。ここで $p_{cl}(x;E(t))$ は状態 $|\psi>$ の波動関数である。すなわち，量子状態 $|\psi>$ は分布関数 $f(x,p;t)$ を持つ古典的 ensemble 系と同一視できることになり，状態 $|\psi>$ は時刻 t_0 以降 〝古典化した〟 と考えられる。

さて，上の議論の重要な問題点は条件 (4.2) が，dynamical variables の選び方に依存する，すなわち，(x,p) に対する正準変換によって不変でない事である。特に，Inflation 時期の量子ゆらぎを表わす Q についてその各 $\vec{k}$-mode を考えると，Hamiltonian は

$$H_{\vec{k}}(Q_{\vec{k}},\Pi_{\vec{k}})=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^3}\Pi^2_{\vec{k}}+\left(2H^2+\frac{k^2}{a^2}\right)a^3Q^2_{\vec{k}}\right], \qquad (4.5)$$

となるが，

$$\chi_{\vec{k}}=aQ_{\vec{k}}, \quad p_{\vec{k}}=Ha^2Q_{\vec{k}}+\frac{1}{a}\Pi_{\vec{k}}, \qquad (4.6)$$

なる正準変換（今の場合は conformal 変換に対応）をすると新しい Hamiltonian は

$$H'_{\vec{k}}(\chi_{\vec{k}},p_{\vec{k}})=\frac{1}{2}p^2_{\vec{k}}+\frac{1}{2}k^2\chi^2_{\vec{k}}, \qquad (4.7)$$

となる。(4.7) は通常の harmonic oscillator のそれであるから，$|\psi>$ としてその ground state を取れば

$$\Psi'(\chi_{\vec{k}};t)=N_k\exp\left[-\frac{1}{2}k\chi^2_{\vec{k}}-\frac{i}{2}\int^t\frac{k}{a(t')}dt'\right] \qquad (4.8)$$

又，明らかに

$$<\psi|\chi^2_{\vec{k}}|\psi><\psi|p^2_{\vec{k}}|\psi>=\frac{1}{4}, \qquad (4.9)$$

であり，条件(4. 2)は不成立である。ところが元の変数に対して同じ状態 $|\psi>$ を考えると，波動関数は

$$\Psi(Q_{\vec{k}}\,;\,t) = N_k\sqrt{a}\exp\left[-\frac{1}{2}ka^2Q_{\vec{k}}^2 - \frac{i}{2}\int^t\frac{k}{a(t')}dt' - \frac{i}{2}Ha^3Q_{\vec{k}}^2\right], \qquad (4.10)$$

で与えられ，

$$<\psi|Q_{\vec{k}}^2|\psi><\psi|\Pi_{\vec{k}}^2|\psi> = \frac{1}{4}\left(1+\frac{H^2}{(k/a)^2}\right), \qquad (4.11)$$

となる。すなわち，$(Q_{\vec{k}},\Pi_{\vec{k}})$ に対しては $k/a \ll H$ (superhorizon scale) で条件(4. 2)が成立するのである。実際(4. 10)を(4. 3)に代入して作った分布関数 f は(4. 4)を満たす。

さて，(4. 7)の Hamiltonian に対して定義した真空は，実は§3において導入した conformal vacuum $|0_c>$ そのものなのである。この事は，Inflation 宇宙で実現する量子状態に対しては，その状態が古典化するかどうかが，変数の選び方に大きく依存している事を示している。つまり，§2の終りに述べたような直観的議論を信用するのは極めて危険と思われる。

§ 5. Conclusion

Inflation 宇宙モデルは，宇宙論の様々な問題を解決するモデルとして非常に魅力的である。しかし，Inflation の dynamics そのものについての物理的理解は非常に不充分であり，今後解決すべき課題が多い。ここでは，その内，Inflation 宇宙における密度ゆらぎの起源を量子的場のゆらぎに求める考え方について，その妥当性を吟味した。その結果，現在一般に受け入れられている理論に重要な疑問点がある事を明らかにした。

References

1) 小玉英雄，本号の研究会報告。
2) 例えば，A. D. Linde, Rep. Prog. Phys. **47** (1984) 925; R. H. Brandenberger, Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 1.
3) J. M. Bardeen, Phys. Rev. **D22** (1980) 1882.
4) H. Kodama and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 78 (1984).
5) M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 394.
6) M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **76** (1986) No. 5, in press.
7) R. H. Brandenberger, Nucl. Phys. **B245** (1984) 328.
8) H. Kodama and M. Sasaki, Int. J. Mod. Phys. **A1** (1986) 265.
9) D. H. Lyth, Phys. Rev. **D31** (1985) 1972.
10) A. H. Guth and S.-Y. Pi, Phys. Rev. **D32** (1985) 1899.